IIB

1 [1] (1) $f(0)=\underline{-1}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{2+\sqrt{3}}$

(2) $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\underline{\frac{\cos 2\theta+1}{2}}$

$f(\theta)=3\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$

$=\underline{2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1}$

(3) $f(\theta)=\sqrt{2^2+(-2)^2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1$

$=\underline{2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{4}\pi$

よって $-1\leqq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに $-2\sqrt{2}+1\leqq f(\theta)\leqq 2\sqrt{2}+1=3.8\cdots$

よって $\underline{m=3}$

$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=3$ のとき

$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$

よって $2\theta=\frac{\pi}{2},\pi$ より $\theta=\underline{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}}$

[2] 真数 >0 より $\begin{cases}x+2>0\\y+3>0\end{cases}$ すなわち $\underline{\begin{cases}x>-2\\y>-3\end{cases}}$ ②

$\log_4(y+3)=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(y+3)}{2}$

よって ①より $\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1$

$\log_2(y+3)=\log_2 2(x+2)$ より

$y+3=2(x+2)$ すなわち $\underline{y=2x+1}$ … ④

④より $\left(\frac{1}{3}\right)^y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}=\frac{1}{3}\cdot\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2=\frac{1}{3}t^2$

③は $\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0$ となり $\underline{t^2-11t+18=0}$ … ⑤

ここで $\begin{cases}x>-2\\y=2x+1>-3\end{cases}$ より $x>-2$

よって $0<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ より $\underline{0<t<9}$

⑤から $(t-2)(t-9)=0$ で $t=2$

したがって $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$ より $3^x=\frac{1}{2}$

すなわち $\underline{x=\log_3\frac{1}{2}}$

また $y=2\cdot\log_3\frac{1}{2}+1=\log_3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3\right\}$

$=\underline{\log_3\frac{3}{4}}$

2 (1) $f'(x)=3x^2+2px+q$

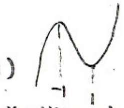
$f'(-1)=3-2p+q=\underline{0}$

$f(-1)=-1+p-q=2$

すなわち $\begin{cases}-2p+q=-3\\p-q=3\end{cases}$ より $\underline{p=0,\ q=-3}$

$f(x)=x^3-3x$ より

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$



よって $\underline{x=1}$ で $\underline{極小値\ -2}$ (増減表略)

(2) Dは $y'=-2kx$ より 接線 ℓ は

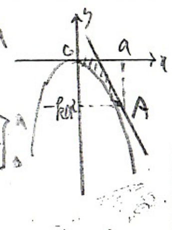
$y-(-ka^2)=-2ka(x-a)$

すなわち $\underline{y=-2kax+ka^2}$ …①

ℓ と x 軸との交点は $-2kax+ka^2=0$ より

$\underline{x=\frac{a}{2}}$ で D と x 軸, $x=a$

で囲む面積は



$\int_0^a\{-(-kx^2)\}dx=\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a$

$=\underline{\frac{k}{3}a^3}$

よって $S=\frac{k}{3}a^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot(ka^2)=\underline{\frac{k}{12}a^3}$

(3) $A(a,-ka^2)$ が $C:y=x^3-3x$ 上 より

$-ka^2=a^3-3a$ よって $\underline{k=\frac{3}{a}-a}$

C と ℓ の 接点 $(b,\ b^3-3b)$ より

$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$

$\underline{y=3(b^2-1)x-2b^3}$ … ②

よって $f(x)-g(x)=x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}$

$=x^3-3b^2x+2b^3$

$=\underline{(x-b)^2(x+2b)}$

$\left(\begin{array}{l} b \,|\, 1\ \ 0\ \ -3b^2\ \ 2b^3 \\ \quad\ \ \ \ b\ \ \ b^2\ \ -2b^3 \\ b \,|\, 1\ \ b\ \ -2b^2\ \ 0 \\ \quad\ \ \ \ b\ \ \ 2b^2 \\ \quad\ 1\ \ 2b\ \ 0 \end{array}\right)$

よって Cは Aも 通るから

$\underline{a=-2b}$ で $b=-\frac{1}{2}a$

このとき ②の傾きは

$3(b^2-1)=3\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)=\frac{3}{4}a^2-3$

①の傾きは

$-2ka=-2\left(\frac{3}{a}-a\right)\cdot a=-6+2a^2$

よって $\frac{3}{4}a^2-3=-6+2a^2$ より

$\frac{5}{4}a^2=3$ より $\underline{a^2=\frac{12}{5}}$

よって $S=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{a}-a\right)a^3=\frac{1}{12}(3a^2-a^4)$

$=\frac{1}{12}\left(3\cdot\frac{12}{5}-\frac{144}{25}\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{36}{25}=\underline{\frac{3}{25}}$

3 (1) $S_2=3+3\cdot 4=\underline{15}$ $T_2=-1+3=\underline{2}$

(2) $S_n=\frac{3(4^n-1)}{4-1}=\underline{4^n-1}$

$n\geqq 2$ のとき

$T_n=T_1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)$

$=-1+\frac{4\cdot(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n-1)=\underline{\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}}$

これは $T_1=-1$ も満たす

(3) $b_1=\frac{a_1+2T_1}{1}=-3+2\cdot(-1)=\underline{-5}$

$T_n=\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}$ より …①

$T_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\frac{4}{3}$ …②

② − ①×4 より $T_{n+1}-4T_n=3n+3$

すなわち $\underline{T_{n+1}=4T_n+3n+3}$

ここで $na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n$ より

$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}$

よって

$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{8T_n+6(n+1)}{n+1}$

$=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n}+6$

$=4\left(\frac{a_n+2T_n}{n}\right)+6$

すなわち $\underline{b_{n+1}=4b_n+6}$

$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$ より $\{b_n+2\}$ は公比4

の等比数列で 初項 $b_1+2=-5+2=-3$ より

$b_n+2=-3\cdot 4^{n-1}$ より $\underline{b_n=-3\cdot 4^{n-1}-2}$

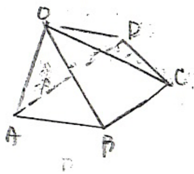
(ナは $\underline{n-1\ ⓪}$)

ゆえに

$a_n=nb_n-2T_n=n(-3\cdot 4^{n-1}-2)-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)$

$=\underline{\frac{-(9n+8)\cdot 4^{n-1}+8}{3}}$

4



(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より $\vec{a}\perp\vec{c}$

すなわち $\underline{\angle AOC=90^\circ}$

よって $\triangle OAC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$=-1-3+3=\underline{-1}$

$|\overrightarrow{BA}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1^2-2\cdot 1+(\sqrt{3})^2=2$

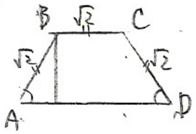
$|\overrightarrow{BA}|>0$ で $|\overrightarrow{BA}|=\underline{\sqrt{2}}$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{5})^2-2\cdot 3+(\sqrt{3})^2=2$ より $\underline{|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}}$

よって $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$ より

$\underline{\angle ABC=120^\circ}$ したがって $\angle BAD=\angle ADC=60^\circ$



また $AB=BC=CD$ より

$\underline{\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}}$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})$

$=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$

四角形ABCDの面積は $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\overrightarrow{BH} \perp$ 平面α より $\overrightarrow{BH} \perp \vec{a}$, $\overrightarrow{BH} \perp \vec{c}$

よって $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = \underline{0}$ かつ $\overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = 0$

すなわち $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = s\vec{a} + t\vec{c} - \vec{b}$ より

$$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = (s\vec{a} + t\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$$
$$= s|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = s - 1 = 0$$

よって $\underline{s = 1}$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = (s\vec{a} + t\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
$$= t|\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 5t - 3 = 0$$

よって $\underline{t = \frac{3}{5}}$

ゆえに $\overrightarrow{BH} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c} - \vec{b}$ より

$$|\overrightarrow{BH}|^2 = |\vec{a}|^2 + \frac{9}{25}|\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - \frac{6}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= 1 + \frac{9}{5} + 3 - \frac{18}{5} - 2 = \frac{1}{5}$$

$|\overrightarrow{BH}| > 0$ より $|\overrightarrow{BH}| = \sqrt{\frac{1}{5}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

したがって $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \underline{\frac{1}{6}}$

---

(4) $\triangle ACD = 2\triangle ABC$ より

四面体OABCDの体積は $\underline{3V} = \frac{1}{2}$

よって $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{1}{2}$ (高さhとして)

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$