IIB

1

[1] (1) $\sqrt{3}(\cos\theta - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}(\cos\theta\cdot\frac{1}{2} + \sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2})$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$

であるので、$\sin\theta > \sqrt{3}(\cos\theta - \frac{\pi}{3})$ ……① は

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta < 0$ すなわち

$\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) < 0$

と変形できる。$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき、$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$

であるので、求める範囲は、

$\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$、すなわち $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$ である。

(2) 2次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解が

$\sin\theta, \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ のとき、解と係数の関係より

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25}$

である。このとき、

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\frac{49}{25} - \frac{2k}{25} = 1$ ∴ $k = 12$ である。

さらに $\sin\theta \geqq \cos\theta$ であるとき、

$25x^2 - 35x + 12 = 0$

$(5x-4)(5x-3) = 0$

$x = \frac{4}{5}$ or $\frac{3}{5}$

から、$\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ である。

このとき、$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ より、θ は $\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$ を

みたす。(すなわち ③ である)

[2] (1) $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ のとき

$(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} - 2 = 9$

であるので、$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = 11$ である。

また、

$(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^2 + 4t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} = 13$

であるから、

$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{13}$

であり、このとき、

$t - t^{-1} = (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^3 + 3(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) = -27 - 9 = -36$

である

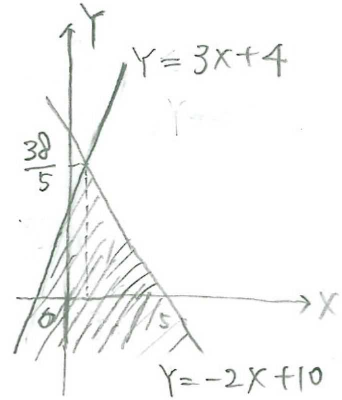
(2) $\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \text{……②} \\ \log_{81}\frac{y}{x^3} \leqq 1 & \text{……③} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y \leqq 5 & \text{……②'} \\ \frac{1}{4}(\log_3 y - 3\log_3 x) \leqq 1 & \text{……③'} \end{cases}$

であるので、$\log_3 x = X$, $\log_3 y = Y$ とすると

②より $2X + Y \leqq 10$ ……④

③より $3X - Y \geqq -4$ ……⑤

とできる。



これより、右図のように考えれば、

Yがとり得る最大の整数は

7 である。

このとき $1 \leqq X \leqq \frac{3}{2}$ であるので、

$1 \leqq \log_3 x \leqq \frac{3}{2}$ すなわち $3 \leqq x \leqq 3\sqrt{3}$

であるので、x のとり得る最大値は 5 である。

② (1) C 上の点 $(t,\ t^2+2t+1)$ における接線は

$y=x^2+2x+1$ のとき, $y'=2x+2$ であることから

$\underline{y=(2t+2)x-t^2+1}$

である. 一方, 点 $(s,\ f(s))$ における D の接線は,

$f'(x)=2x-(4a-2)$ であることから,

$\underline{y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1}$

である. この2つが一致することから,

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=s-2a \\ -t^2=-s^2+4a^2 \end{cases}$$

となり, これを解くと, $\underline{t=0,\ s=2a}$ とわかる.

したがって l: $\underline{y=2x+1}$ である.

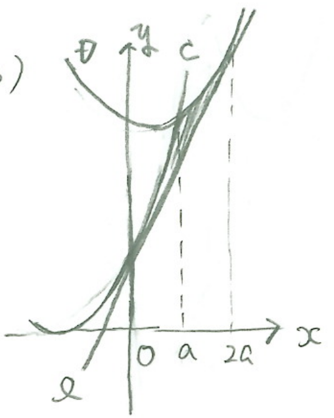
(2) $C:\ y=x^2+2x+1$, $D:\ y=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$

の共有点の x 座標は, これらを連立することにより, $\underline{x=a}$ とわかる.

ここで, C, l, $x=a$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^a x^2\,dx=\underline{\frac{a^3}{3}}$$ である

(3)



左図のようになるので,

$\underline{a\geqq 1}$ のとき

$$T=\int_0^1 x^2\,dx=\underline{\frac{1}{3}}$$

であり,

$\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$T=\int_0^a x^2\,dx+\int_a^1 (x-2a)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}(1-2a)^3-\frac{1}{3}(-a)^3$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{8}{3}a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a^3$$

$$T=\underline{-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}}$$

である

(4) $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき

$$U=2T-3S=-4a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}-a^3$$

$$=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}=g(a)$$ とおく

$$g'(a)=-15a^2+16a-4$$

$$=-(5a-2)(3a-2)$$

であるので, $g'(a)=0$ のとき $a=\frac{2}{5}$ か $\frac{2}{3}$

である. よって増減は下図のとおりとなるので, 最大となるのは

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		↗	極大	↘	

$a=\underline{\frac{2}{3}}$ のときで, 最大値は

$$U=-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{20}{9}+\frac{16}{3}-3\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}$$

$$=\underline{\frac{2}{27}}$$ である

3

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}\{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \quad \cdots\cdots ①$$

について考える（ただし $a_1 = 0$）

(1) $a_2 = \frac{4}{2}(3^2 - 2\cdot 3) = 6$ である．

(2) $e_n = \dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおくと

$e_1 = \dfrac{0}{3\cdot 2\cdot 3} = 0$ である．また，①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ でわると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

すなわち，

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

を得る．これより，

$$e_{n+1} - e_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

である．ここで $n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

であり，また，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \frac{\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

であるので，

$$e_n = e_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right) - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

である．これは $n=1$ でも成り立つ

したがって

$$a_n = 3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\right\}$$

$$= (n+2)\left\{3^{n-1}(n-2) + \frac{1}{2}(n+1)\right\}$$

$$a_n = 3^{n-1}(n^2-4) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

である．

(4) $$a_{3k} = 3^{3k-1}(9k^2-4) + \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$$

$$= 3^{3k-1}(9k^2-4) + \frac{1}{2}(9k^2+9k) + 1$$

であるので 3で割った余りは 1

$$a_{3k+1} = 3^{3k}(9k^2+6k-3) + \frac{1}{2}(3k+2)(3k+3)$$

$$= 3^{3k}(9k^2+6k-3) + 3\cdot\frac{1}{2}(3k+2)(k+1)$$

であるので，3で割った余りは 0．

$$a_{3k+2} = 3^{3k+1}(9k^2+12k) + \frac{1}{2}(3k+3)(3k+4)$$

$$= 3^{3k+1}(9k^2+12k) + 3\cdot\frac{1}{2}(k+1)(3k+4)$$

であるので 3で割った余りは 0

である．すると $\{a_n\}$ の初項から第2020項までの和を3で割った余りは，

$$2020 = 3\cdot 673 + 1$$

$$= 3\cdot(3\cdot 224 + 1) + 1$$

であることから，1 であるとわかる．

$\boxed{4}$ A$(3, 3, -6)$, B$(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$
のもとで考える

(1) $|\overrightarrow{OA}| = \underline{3\sqrt{6}}$, $|\overrightarrow{OB}| = \underline{4\sqrt{3}}$ であり

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \underline{36}$ である

(2) 点Cは平面α上であるので, 実数s, tを用いて,

$\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

とあらわせる. ここで, $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ (かつ $\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$) より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$

$\therefore 54s + 36t = 0$ すなわち $3s + 2t = 0$

また, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 24$ より

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = s\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 = 24$

$\therefore 36s + 48t = 24$ すなわち $3s + 4t = 2$

これらを解くと, $\underline{s = \frac{-2}{3},\ t = 1}$ である

これより

$|\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2$

$= \frac{4}{9}\cdot 54 - \frac{4}{3}\cdot 36 + 48 = 24$

すなわち $|\overrightarrow{OC}| = \underline{2\sqrt{6}}$ である

(3) $\overrightarrow{OC} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix} + \overrightarrow{OB}$ $\therefore \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$

であるので, $\overrightarrow{CB} = \underline{(2, 2, -4)}$ である

ここで $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ となっていることから OA // BC である

一方, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{30}$ などから平行四辺形ではないとわかるので,

四角形OABCは平行四辺形ではないが台形 (③) である

また, $|\overrightarrow{OA}| = 3\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{CB}| = 2\sqrt{6}$ より

四角形OABCの面積は $\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6} = \underline{30}$ である

(4) $D(x_D, y_D, 1)$ とおくと

$\begin{cases} 3x_D + 3y_D - 6 = 0 \\ 2\sqrt{3}x_D - 2\sqrt{3}y_D = 2\sqrt{6} \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x_D + y_D = 2 \\ x_D - y_D = \sqrt{2} \end{cases}$

であるから

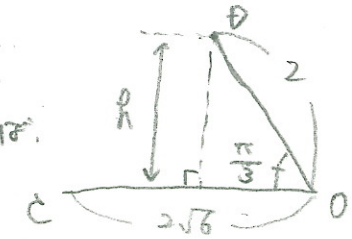
$D\left(\underline{1+\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1}\right)$

である. このとき,

$\cos\angle COD = \dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

であるから $\angle COD = \underline{60^\circ}$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ である

ここで, 左図のように考えると
O, C, Dの定める平面βが
αに垂直であることを認めれば,
四面体DABCの, △ABCを
底面とみたときの高さは
右図 h にあたるので,



$h = 2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \underline{\sqrt{3}}$

である. すると, $\triangle ABC = \underbrace{30}_{台形} - \underbrace{18}_{\triangle OAC} = 12$

であることから

四面体DABCの体積は

$\frac{1}{3}\cdot 12\cdot\sqrt{3} = \underline{4\sqrt{3}}$

である.