IA [1]

[1] (1) $a^2-2a-8<0$ すなわち $-2<a<4$ のときである

(2) $b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}$ であるので,

$a>0$ のとき $b>0$ となるのは $a^2-2a-8<0$ のときである.
したがって, これは $0<a<4$ のときである.

$a\leqq 0$ のとき $b>0$ となるのは $a^2-2a-8>0$ のときである.
したがって, これは $a<-2$ のときである

また, $a=\sqrt{3}$ のとき,

$$b=\frac{-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}-5}=\frac{\sqrt{3}(5-2\sqrt{3})}{13}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$$

である

[2] (1) 32は4の倍数であるが6の倍数, 24の倍数ではないので

$32\in P\cap\overline{Q}\cap\overline{R}$ これにあう選択肢は ② である.

(2) $P\cap Q$ は12の倍数であるから, これをみたす最小の自然数は
12 である.

12は24の倍数ではないので, $12\notin R$ すなわち ④ である

(3) (2)に従えば, 12は命題「(p かつ q) ⇒ r」の反例である
よって, ③ である.

[3] (1) G をあらわす式は

$$y=(x-c)\{x-(c+4)\}$$
$$=x^2-2(c+2)x+c(c+4) \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

である.

2点 $(3,0)$ と $(3,-3)$ を両端とする線分が G と共有点を持つのは
Ⓐで, $x=3$ のとき, を考えればよく

$$9-2(c+2)\cdot 3+c(c+4)=c^2-2c-3$$

が $(3,0)$ と $(3,-3)$ の線分に含まれればよい

すなわち

$$-3\leqq c^2-2c-3\leqq 0.$$

$$\iff \begin{cases} c^2-2c-3\geqq -3 \\ \text{かつ} \\ c^2-2c-3\leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c^2-2c\geqq 0 \\ \text{かつ} \\ c^2-2c-3\leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c\leqq 0 \text{ or } 2\leqq c \\ \text{かつ} \\ -1\leqq c\leqq 3 \end{cases}$$

となるので, 求める答は

$-1\leqq c\leqq 0$ または $2\leqq c\leqq 3$

である

(2) $2\leqq c\leqq 3$ のもとで, G が点 $(3,-1)$ を通るのは,

$-1=c^2-2c-3 \iff c^2-2c-2=0$

すなわち $c=1+\sqrt{3}$ ($2\leqq c\leqq 3$ より)

のときで, このとき Ⓐより

$$y=\{x-(c+2)\}^2-4.$$

であることから, これは $y=x^2$ のグラフを x軸方向に $c+2$, すなわち
$3+\sqrt{3}$, y軸方向に -4 平行移動したものである.

また, このとき G と y軸との交点の y座標は

$$c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}$$

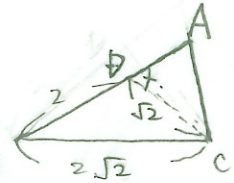
である

[2] [1] △BCDで余弦定理により，

$$BD^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}$$
$$= 10 - 6 = 4$$

$\therefore BD = 2$

である。



すると，$\sin\angle ADC = \sin\angle BDC$，

△BCDで正弦定理により，$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC} = \dfrac{BD}{\sin\angle BCD}$

また，$\cos\angle BCD = \frac{3}{4}$ より，$\sin\angle BCD = \frac{\sqrt{7}}{4}$ であることから

$$\sin\angle ADC = \sin\angle BDC = \sqrt{2}\sin\angle BCD = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

である。

また，CDが角の二等分線であることから

$$BD : AD = BC : AC \iff BD\cdot AC = AD\cdot BC$$
$$\iff \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} = \sqrt{2}$$

であるので，$AC = \sqrt{2}AD$ である。このとき，△ACDで余弦定理より，

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2\cdot AC\cdot CD\cdot\frac{3}{4}$$
$$= 2AD^2 + 2 - 2\sqrt{2}AD\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}$$

$\therefore AD^2 - 3AD + 2 = 0 \qquad AD = 1_{or}2$

であるが，△BDCとの関係から，$AD \neq 2$ であるので，

$AD = 1$ ……

である。このとき $AC = \sqrt{2}$ であり，△ABCで余弦定理より，

$\cos\angle ACB = \frac{1}{8}$

であるので，$\sin\angle ACB = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ となり，△ABCで正弦定理により，

$$2R = \frac{3}{3\sqrt{7}/8} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7} \iff R = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

(R: 外接円の半径)

である。

[2] (1) 具体例で考えるとわかりやすい。

⓪ 9が1つ，10が98個のデータを考えると第1四分位数，第3四分位数はともに10で，平均は9.989…となるので誤り。

① すべてが同じ値のデータを考えると標準偏差，四分位数ともゼロであり，「より大きい」とはいえないので誤り。

② 9が1つ，10が98個のデータを考えると，中央値より小さい観測値は1つのみとなる。よって誤り。

③ 正しい。いずれの場合も小さい方から25番目が第1四分位数となる。

④ すべてが同じ値のデータを考えると，この操作を行ってもすべて残る。よって誤り。

⑤ 正しい

よって，③と⑤である。

(2) (I) P10が不適合のため誤り。

(II) P7とP8，P32とP33などが不適合のため誤り

(III) P1の最大値は79.5以下，P47の最小値は81以上と確認できるので正しい

以上より，⑥ である。

(3) ヒストグラムより，最小値は79.5～80.0間，最大値は81.5～82.0間，中央値は80.5～81.0間，第1四分位数は80.0～80.5間，第3四分位数は81.0付近とわかる。これにあてはまるのは ④ である。

(4) 平均寿命の差が 7.0～7.5歳のものが3つ。
〃 6.5～7.0 〃 13個
〃 5.5～6.0 〃 9個

であり，残りは6.0～6.5歳差とわかる

これを満たすのは ③ のみ。

3 [1] ①について

少なくとも1回表が出るのは，同様に確からしいことを仮定すると

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32} \approx 0.96\cdots$ であり，正しい

①について．

5回行ったのみで確率を求めることは難しいと思われる．また，

球8個に対して確率 $\frac{3}{5}$ というのは数値的におかしい

②について．

同時に2枚取り出す取り出し方の総数は ${}_5C_2 = 10$ 通り．

このうち書かれた2枚のカードの文字が同じになるのは

「ろ」2枚，「は」2枚の2通りであるから，2つの文字が

異なる確率は $\frac{10-2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ となり，正しい

③について

pは，2体とも表と言う，という条件のもとで，ユイが表である確率で

$$p = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0.9 \cdot 0.9}{\frac{1}{2}\cdot 0.9\cdot 0.9 + \frac{1}{2}\cdot 0.1 \cdot 0.1} = 0.98\cdots$$

となり，0.9以下ではないので誤り．

以上より ①，② である

[2] (1) 2回投げ終わって -2 点なのは2回とも裏のときで，その確率は $\frac{1}{4}$

同様に，1点であるのは表・裏が1回ずつ出たときで，その確率は $\frac{1}{2}$

(2) ゲームの設定上，得点が0点になるのは，3回投げ終わったとき

のみである．また，それは表が1回，裏が2回出たときで，

求める確率は

$$\frac{\frac{3!}{2!}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

である．

(3) 終了時に4点となるのは表3回，裏2回のとき途中で0点になるもの

を除くと，求める確率は

$$\frac{\frac{5!}{3!2!} - 3}{2^5} = \frac{7}{32}$$

である

(3) 2回投げ終わった時点で1点で，終了時に4点となるのは

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{2回で1点}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{3回目はオモテ}} \cdot \underbrace{\frac{2}{2^2}}_{\text{残り2回の出方}} = \frac{1}{8}$$

であるので，求める条件付確率は

$$\frac{1/8}{7/32} = \frac{4}{7}$$

である．

④ (1) $x = 2.\dot{3}\dot{6}$ のとき

$100x - x = 236.\dot{3}\dot{6} - 2.\dot{3}\dot{6}$

$99x = 234$

であるので，$x = \frac{234}{99} = \frac{26}{11}$

である．

(2) $y = 2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ のとき

$49y - y = 2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)} - 2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$

$48y = 2ab_{(7)} - 2_{(7)}$

である．ここで，$2ab_{(7)} = 7^2 \cdot 2 + 7^1 \cdot a + 7^0 \cdot b - 7^0 \cdot 2$

$= 98 + 7a + b - 2$

$= 96 + 7a + b$

であるので，$y = \frac{96+7a+b}{48}$ $\left(= 2 + \frac{7a+b}{48} \right)$

である

i) 分子が奇数，分母が4となるのは，

$7a + b = 12(2k+1)$ （kは0以上の整数）

のときで，a，b がともに 0以上6以下で互いに異なるのは，

$(a, b) = (1, 5), (5, 1)$

のみである．

$(a, b) = (1, 5)$ のとき $y = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$(a, b) = (5, 1)$ のとき $y = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$y = \frac{11}{4}$ のとき，$7a + b = 36$ で，$a = 5$，$b = 1$ である．

ii) $y - 2 = \frac{7a+b}{48}$ の分子が1，分母が2以上の整数となるのは

$7a + b$ が24以下の48の約数，すなわち

$7a + b = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24$

のときであり，各々，

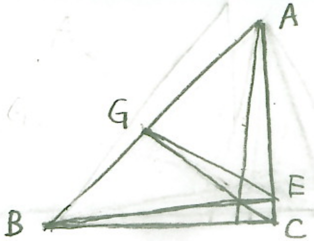
$(a, b) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 6)$

$(1, 1), (1, 5), (2, 2), (3, 3)$

となるが，このうち $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ は不適であるので，

求める個数は 6 個 である．

5



△ABDで メネラウスの定理により、

$$\frac{GB}{AG}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CB}=1$$

ここで、△ADCでメネラウスの定理により、

$\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ より、$\frac{AF}{FD}=\frac{8}{7}\cdot\frac{7}{1}=8 \iff \frac{FD}{AF}=\frac{1}{8}$

であるので、

$$\frac{GB}{AG}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{1}=1.$$

である

また、△GCBでメネラウスの定理により、

$\frac{BA}{AG}\cdot\frac{GF}{FC}\cdot\frac{CD}{DB}=1$ より、$\frac{FC}{GF}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$

である

ここで、△ABCの面積をSとすると、

$\triangle CDG=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{1}{16}S$

$\triangle BFG=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}S=\frac{1}{9}S$

であるので、

$$\frac{\triangle CDG}{\triangle BFG}=\frac{1/16\,S}{1/9\,S}=\frac{9}{16}$$

である。

また、B, D, F, G が同一円周上にあり、FD=1のとき、AF=8であり AD=9である。

方べきの定理より

$AF\cdot AD=AG\cdot AB$

であり、$AG=\frac{1}{2}AB$ であるから、$\frac{1}{2}AB^2=72$.

これより $AB=12$ である。

また、$AE=3\sqrt{7}$ のとき $AC=\frac{8}{7}\cdot3\sqrt{7}$ であるので、

$AE\cdot AC=72$ である。

これは $AG\cdot AB$ に一致するので、4点G, B, E, C も同一円周上に存在する。(方べきの定理の逆)

すると、内対角の和が180°であることから、

∠AEGに等しいのは ∠ABC だとわかる

よって ② である